

Capítulo 2

Campo Elétrico

2.1 Definição e discussão física do Campo Eletrostático

A noção de campo dentro do Eletromagnetismo é muito mais fundamental do que, por exemplo, a noção de campo gravitacional na Teoria Newtoniana, onde a noção de força à distância é suficiente para descrever os processos.

Maxwell conseguiu demonstrar teoricamente, baseando-se nas idéias de Faraday, que as interações eletromagnéticas devem propagar-se no espaço com uma *velocidade finita*. Isto significa que ao deslocarmos ligeiramente a carga A da figura, a força que atua sobre a carga B varia, mas não instantaneamente (como ocorre com a lei da ação e reação na Mecânica Newtoniana).

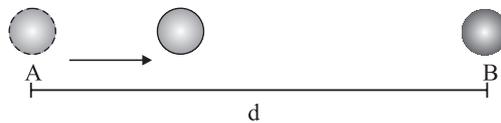


Figura 2.1: Variação do campo

O processo da transmissão de “informação” requer um certo tempo.

$$t = \frac{d}{c}$$

Onde d é a distância entre as cargas e c a velocidade de propagação das interações eletromagnéticas. Maxwell calculou que esta última é 300.000 km/s . O que acontece com a “informação” para tempos entre o deslocamento de A e $t = \frac{d}{c}$?

Imaginemos que essa “informação” seja, por exemplo, energia fornecida ao sistema. Se não admitirmos que existe um agente físico responsável por essa transmissão, estaremos violando a conservação da energia! Esse agente físico, com existência *independente* é o campo elétrico. Na verdade em todas as teorias que estão de acordo com a teoria da Relatividade, a noção de campo é absolutamente fundamental.

A característica importante que diferencia as teorias de ação à curta distância das teorias de ação à distância é a existência de um determinado processo que decorre no espaço entre os campos em interação e que tem duração temporal finita. Para concretizar essas idéias podemos pensar nas ondas de rádio. A transmissão de informação por meio de ondas eletromagnéticas chama-se radio-comunicação. As ondas de rádio emitidas por uma estação cósmica que se aproxima do planeta Vênus levam quatro minutos para chegar à Terra. A estação cósmica já poderia estar queimada pela atmosfera de Vênus, mas as ondas de rádio por ela emitidas conservar-se-ia durante muito tempo. Assim, o campo eletromagnético comporta-se como algo perfeitamente real.

O que é o campo elétrico?

Dizemos que existe um campo elétrico quando uma carga q_0 colocada nesse ponto reagir como se estivesse sob a ação de uma força de origem elétrica. Em termos matemáticos, temos o seguinte: sendo $|\mathbf{F}|$ o módulo da força elétrica que atua em uma carga de prova q_0 , colocada em um ponto do espaço, o vetor campo elétrico \mathbf{E} neste ponto tem uma intensidade, direção e sentido dados por

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0}$$

Onde q_0 é por definição uma carga positiva.

Observações conceituais importantes:

1) O campo é uma grandeza *vetorial*, que depende do ponto no espaço onde se encontra. Na Física existem outros tipos de campos, como, por exemplo, o campo de

pressão dentro de uma flauta que está sendo tocada. Uma diferença importante é que o campo de pressão $p(x, y, z, t)$, embora também dependa do ponto no espaço e do tempo, é um campo escalar, ie, a ele não estão associados direção e sentido naquele ponto, como no caso do campo elétrico, ou também; um campo de velocidades num fluido.

2) Até agora usamos apenas o conceito de força de Coulomb, \mathbf{F}_c como sendo o resultado da interação entre cargas. Com a introdução do conceito de campo eletrostático, podemos visualizar esta interação de uma maneira diferente: dizemos que uma distribuição de cargas *cria um campo elétrico* nos pontos do espaço em torno dela e que este campo elétrico é responsável pelo aparecimento da força elétrica sobre a carga q_0 de prova colocada nesses pontos.

Consideremos então uma distribuição de cargas puntiformes como na figura 2.2

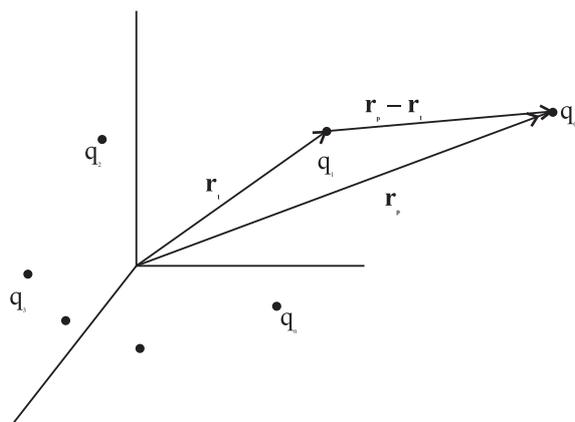


Figura 2.2: Distribuição de cargas puntiformes

Devido ao *Princípio da Superposição* o campo elétrico sobre a carga de prova q_0 é dado pela soma dos campos elétricos das cargas individuais, como se as outras não existissem.

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i^2} \hat{\mathbf{r}}_i$$

Onde $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_P - \mathbf{r}'_i$.

Um erro muito comum ao resolver problemas envolvendo distribuições de carga é usar \mathbf{r}_p (ou \mathbf{r}'_i) no lugar de \mathbf{r}_i . A lei de Coulomb nos diz que a distância que deve ser colocada nesse denominador é a distância entre *as duas cargas* cuja interação está sendo considerada. E essa distância NÃO É r_p ou r'_i , mas a diferença desses vetores. Por isso, em todo problema de eletrostática é MUITO IMPORTANTE escolher um sistema de referência arbitrário e definir TODAS AS DISTÂNCIAS ENVOLVIDAS NO PROBLEMA de forma CONSISTENTE com essa escolha. Preste muita atenção na definição do vetor que localiza o ponto P (de observação, onde colocaremos a carga de prova), o ponto referente à carga que *gera* esse campo \mathbf{r}'_i e na *distância entre as cargas*, que você vai usar na lei de Coulomb. Isto também vai ser igualmente importante quando estivermos calculando campos de distribuições contínuas de carga.

Exercício: Campo de um dipolo no seu plano bissetor.

(a) Determine uma expressão para o campo elétrico no plano bissetor perpendicular de um dipolo.

(b) Aplique o resultado obtido na parte (a) ao caso em que \mathbf{E} é calculado a distâncias do dipolo muito maiores do que a separação entre as duas cargas pontuais do mesmo. Dado o módulo das cargas q e a distância entre elas, $2a$.

Antes de mais nada, conforme discutimos, vamos escolher um sistema de referências, localizar vetorialmente as cargas que geram o campo, localizar o ponto de observação e a distância que deve ser usada na lei de Coulomb, para cada carga. Veja a figura 2.3:

Não se esqueça de *desenhar os campos* e verificar (como é o caso deste problema) se existe alguma simetria que fosse facilitar o cálculo. Neste caso é fácil perceber que não haverá componente de campo resultante no eixo y , apenas na direção z , pois os módulos de \mathbf{E}_+ e \mathbf{E}_- são idênticos. Vamos escrevê-los

$$\mathbf{E}_+ = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_+^2} \hat{\mathbf{r}}_+ \quad e \quad \mathbf{E}_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_-^2} \hat{\mathbf{r}}_-$$

Em termos dos dados do problema, temos que

$$|\mathbf{r}_+| = \sqrt{y_P^2 + a^2} = |\mathbf{r}_-|$$

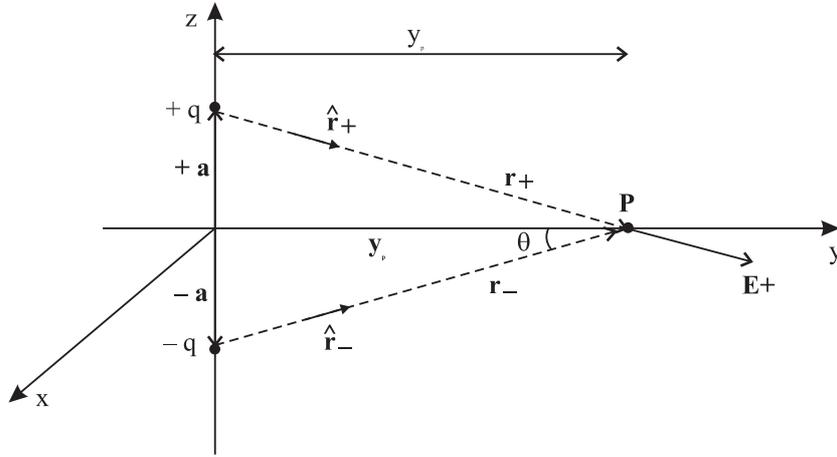


Figura 2.3: Sistema de referências adequado

Vetorialmente $\mathbf{r}_+ = y_P \hat{\mathbf{j}} - a \hat{\mathbf{k}}$ e $\mathbf{r}_- = y_P \hat{\mathbf{j}} + a \hat{\mathbf{k}}$

$$\hat{\mathbf{r}}_+ = \frac{\mathbf{r}_+}{r_+} = \frac{y_P \hat{\mathbf{j}} - a \hat{\mathbf{k}}}{\sqrt{y_P^2 + a^2}} \quad e \quad \hat{\mathbf{r}}_- = \frac{\mathbf{r}_-}{r_-} = \frac{y_P \hat{\mathbf{j}} + a \hat{\mathbf{k}}}{\sqrt{y_P^2 + a^2}}$$

Substituindo na expressão para o campo resultante

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = \frac{-2aq\hat{\mathbf{k}}}{4\pi\epsilon_0(y_P^2 + a^2)^{3/2}}$$

De fato, só haverá componente do campo na direção $\hat{\mathbf{k}}$, como havíamos discutido.

b) O que significa dizer “distâncias do dipolo (y_P) muito maiores do que a separação entre as duas cargas ($2a$)”? Esse tipo de limites são muito comuns e importantes em Física. É necessário compreender e saber escrever essa frase matematicamente em termos de uma desigualdade

$$\frac{2a}{y_P} \ll 1$$

Neste caso,

$$\mathbf{E} \cong \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-2aq\hat{\mathbf{k}}}{y^3}$$

Isto é, o campo do dipolo, quando estamos suficientemente distantes é inversamente proporcional ao cubo da distância y_P .

2.2 Linhas de Força

O conceito de linhas de força foi introduzido por M. Faraday como uma maneira de visualizar o campo elétrico.

Vamos começar com uma carga puntual positiva Q que cria um campo radial no espaço à sua volta. Em cada ponto do espaço temos um vetor campo elétrico \mathbf{E} , cujo módulo diminui à medida que nos afastamos da carga (figura 2.4).

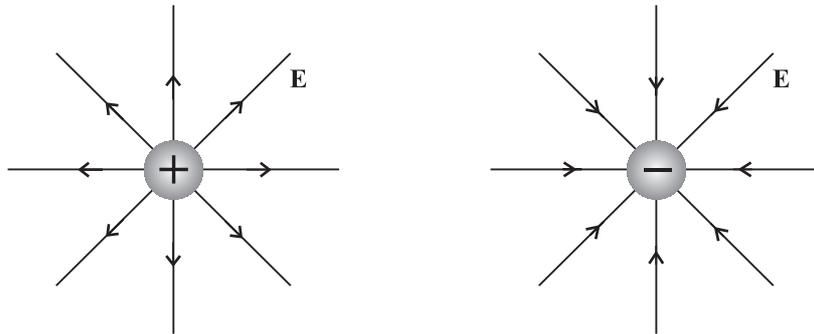


Figura 2.4: Campos de cargas pontuais

Se a carga que cria o campo elétrico for negativa, o vetor campo elétrico estará dirigido para a carga como vemos na outra parte da figura 2.4.

As linhas de força são linhas contínuas que unem os pontos aos quais o campo elétrico é tangente. É errado pensar que essas linhas tem existência real, algo como fios elásticos ou cordas. Elas apenas *ajudam* a representar de uma forma diagramática a distribuição do campo no espaço e não tem mais realidade do que os meridianos e os paralelos do globo terrestre. No entanto, pode-se fazer com que essas linhas tornem-se “visíveis”. Se fizermos uma solução de cristais isolantes num líquido viscoso e mergulharmos nesse líquido vários corpos carregados, os cristais localizados nas proximidades desses corpos irão formar cadeias ao longo das linhas

de força.

Além de nos fornecer a direção e o sentido do campo elétrico, a *densidade* de linhas de campo tem informação sobre a intensidade do campo elétrico sobre uma certa superfície. No caso da carga puntiforme, como vemos nas figuras 2.4 e 2.5, se tomarmos uma superfície esférica de área $4\pi R^2$, a densidade de linhas sobre essa superfície será $\frac{N}{4\pi R^2}$, onde N é o número de linhas de força que atravessa a superfície. Então, vemos imediatamente que esse argumento recupera a lei de Coulomb. (Note que se o mundo fosse bidimensional esse argumento nos forneceria $N/2\pi R!$).

Outros exemplos de linhas de força em situações mais complicadas, são mostradas abaixo:

* Dipolo, etc. (ver Keller - pg 19)

2.3 Campos de distribuições contínuas de cargas

Antes de mais nada, vamos discutir *por que* faz sentido falar em distribuições contínuas de carga se sabemos que a carga é quantizada e é sempre um múltiplo inteiro da carga do elétron

$$e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$$

Podemos formular essa questão como um exercício: - Dado que duas bolas de tênis de massa $0,15 \text{ Kg}$ após serem atritadas se repelem com uma força de $9,0 \mu\text{N}$ quando estão separadas por 4 m , determine o número de elétrons que estão faltando em cada bola e estime a fração desses elétrons com relação à carga positiva total da bola.

Como cada bola tem a mesma carga q ,

$$q = \sqrt{4\pi\epsilon_0 r^2 F} = \sqrt{\frac{(4,0\text{m})^2(9,0\mu\text{N})}{(9,0 \times 10^9 \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2)}} = 130\text{nC}$$

O número de elétrons faltantes em cada bola será:

$$n = \frac{q}{e} = \frac{130\text{nC}}{1,60 \times 10^{-19}\text{C}} = 7,9 \times 10^{11} \text{ elétrons}$$

ATENÇÃO - EXERCÍCIO REPETIDO

O objetivo desse exercício é mostrar dois fatos importantes: o caráter quantizado da carga dos elétrons não se manifesta em objetos macroscópios, como as bolas de beisebol. E fazer isto entendendo a *ordem de grandeza* do fenômeno. Neste problema o mais importante não é o manuseio das fórmulas, que é muito simples, mas a INTERPRETAÇÃO DO RESULTADO.

Vamos começar calculando a carga q , igual em ambas as bolas

$$q = \sqrt{4\pi\epsilon_0 r^2 F}$$

Podemos escolher qualquer ponto na curva para calcular q . Por exemplo, $F = 9,0\mu N$ e $r = 4,0m$

$$q = \sqrt{\frac{(4,0m)^2(9,0\mu C)}{9,0 \times 10^9 Nm^2/C^2}}$$

Seja n o número de elétrons que faltam em cada bola.

$$n = \frac{q}{e} = \frac{130nC}{1,6 \times 10^{-19}C} = 7,9 \times 10^{11} \text{ elétrons}$$

Num objeto neutro, o número de elétrons é igual ao número de prótons. A fração dos elétrons que faltam é n/N_P se N_P for o número de prótons.

Considerando que uma bola de beisebol tem massa de cerca de $0,15Kg$ e que metade dessa massa é atribuída aos prótons e metade aos nêutrons. Dividindo então a massa de uma bola de beisebol pela massa de um par próton-neutron, obtemos uma estimativa de N_P

$$N_P = \frac{M}{m_p + m_n} = \frac{0,15Kg}{2(1,67 \times 10^{-27}Kg)} = 5 \times 10^{25} \text{ prótons}$$

E a fração de elétrons ausentes, então, é dado por

$$\frac{n}{N_P} = \frac{7,9 \times 10^{11} \text{ elétrons que faltam}}{5 \times 10^{25} \text{ prótons}} = 2 \times 10^{-14}$$

O que quer dizer esse resultado?

Significa que cerca de *um* em cada 5×10^{13} (ou $1/2 \times 10^{-14}$) elétrons está ausente em cada bola.

E este número? Como desenvolver uma intuição sobre os fenômenos eletrostáticos? Vamos tentar entender mais profundamente o que significa esse número, comparando-o com coisas que conhecemos: a população humana da Terra é cerca de 6×10^9 , de modo que o resultado obtido para os elétrons faltantes é cerca de 10.000 VEZES A POPULAÇÃO HUMANA DA TERRA.

O resultado do problema anterior justifica falarmos em *distribuição contínua* de cargas.

Agora vamos discutir *como calcular* o campo de uma distribuição contínua de cargas. Embora muitos livros textos dêem a idéia de que a força de Coulomb, o campo eletrostático e a lei de Gauss são coisas completamente independentes, isso NÃO É VERDADE, como veremos neste caso. É sempre a lei de Coulomb que está fundamentando os três tópicos. A diferença agora é que não estaremos mais falando de cargas puntiformes, mas aplicaremos a lei de Coulomb a elementos infinitesimais da distribuição, integrando sobre todos eles depois. Nesta etapa, o conceito fundamental é o Princípio da Superposição.

Colocação do Problema Geral:

Outra vez vamos proceder da mesma maneira que fizemos no caso de cargas puntiformes: - Escolher um sistema de referências, um diferencial de cargas *arbitrariamente localizado* (não use pontos estratégicos, esse elemento de cargas deve estar arbitrariamente localizado, *de acordo com o sistema de referências que você usou*). Identifique as três distâncias: \mathbf{r}_P , a localização do ponto de observação, \mathbf{r}' , a localização do elemento arbitrário de carga e a distância entre dq e o seu ponto de observação. Veja a figura 2.5.

Vamos escrever o campo elementar $d\mathbf{E}_{dq}$ gerado pelo elemento de carga dq ,

$$d\mathbf{E}_{dq} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{|\mathbf{r}_P - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}')$$

Para conhecer o campo resultante devemos integrar sobre os elementos de carga (aqui entra o Princípio da Superposição)

$$\mathbf{E}_R(\mathbf{r}_P) = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}_P - \mathbf{r}'|} (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}')$$

O elemento de carga pode depender do ponto r' . Em geral, podemos escrever

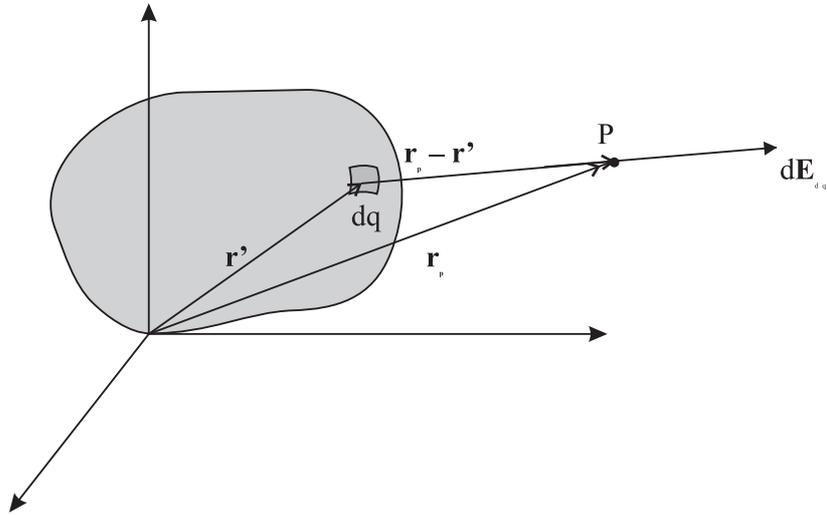


Figura 2.5: Problema Geral

$$dq = \rho(\mathbf{r}')dV'$$

Onde $\rho(\mathbf{r}')$ é a densidade de cargas no ponto r' e dV' o elemento de volume (você vai integrar sobre as variáveis DENTRO da DISTRIBUIÇÃO de cargas, não sobre um volume arbitrário).

Então, a expressão mais geral para o campo eletrostático gerado por uma distribuição de cargas é

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_P) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')dV'}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}_P - \mathbf{r}'|^3}(\mathbf{r}_P - \mathbf{r}')$$

2.4 Ferramentas matemáticas importantes

Além dos pontos que já enfatizamos no que se refere a montar o problema, para resolver problemas que envolvem o cálculo do campo elétrico de distribuições contínuas de carga, é importante ter familiaridade com os vários elementos de volume dV' que podem aparecer.

- Distribuição linear de cargas:

$$dV' \longrightarrow dx'$$

- Distribuição superficial de cargas:

$$dV' \longrightarrow dx dy \text{ (superfície plana) ou}$$

$$dV' \longrightarrow r dr d\theta \text{ (disco)}$$

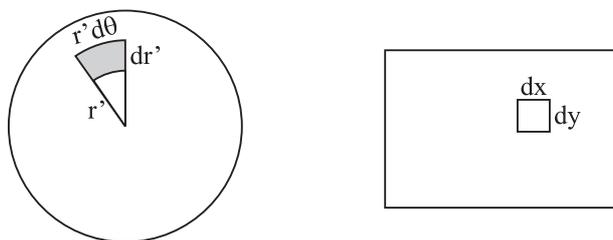


Figura 2.6: Elementos de área no plano

- Distribuição volumétrica de cargas:

$$dV' \longrightarrow dx dy dz \text{ (cúbica) ou}$$

$$dV' \longrightarrow \rho d\rho d\phi dz \text{ (cilíndrica) ou}$$

$$dV' \longrightarrow r^2 \sin \theta dr d\phi d\theta \text{ (esférica)}$$

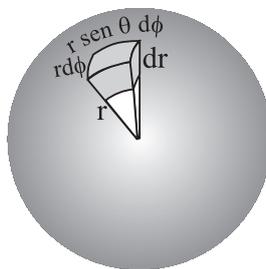


Figura 2.7: Elementos de volume - Esférica

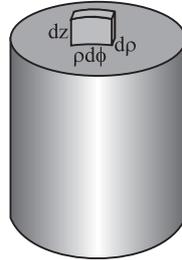


Figura 2.8: Elementos de volume - Cilíndrica

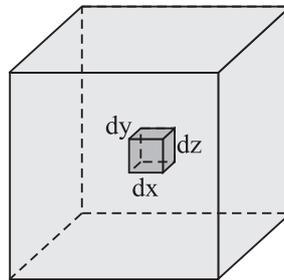


Figura 2.9: Elementos de volume - Cúbica

A outra ferramenta matemática importante é a expansão em série de Taylor. Uma das muitas utilizadas é

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \dots \quad \text{se } x \ll 1$$

Sempre que você tiver que tomar limites conhecidos a partir de alguma expressão complicada e se isso envolver, por exemplo, que algum parâmetro a seja muito maior que outro b , construa x de modo que

$$x = \frac{b}{a}$$

Reescreva sua resposta em termos de x e faça a expansão. Em geral, a expansão em série de Taylor de uma função $f(\mathbf{x})$ para $|\mathbf{x}| \ll 1$ é dado por

$$f(\mathbf{x}) \cong f(0) + \mathbf{x} \cdot \nabla f|_{\mathbf{x}=0} + \frac{1}{2}(\mathbf{x} \cdot \nabla)^2 f|_{\mathbf{x}=0} + \dots$$

2.5 Exercícios Resolvidos

Vamos começar com um exemplo simples que tem como objetivo ressaltar a importância de formular corretamente a lei de Coulomb no referencial escolhido. Além disso, vamos mostrar explicitamente que a sua *resposta*, obviamente NÃO PODE DEPENDER da escolha do referencial que você fizer. No entanto, formular o problema de forma *conveniente* com sua escolha é fundamental.

1 - Uma barra isolante de comprimento L uniformemente carregada com densidade de carga linear λ . Calcule o campo elétrico a uma distância x_P de uma das extremidades da barra, na direção da mesma.

Vamos começar formulando o problema em dois referenciais diferentes e resolver simultaneamente nos dois.

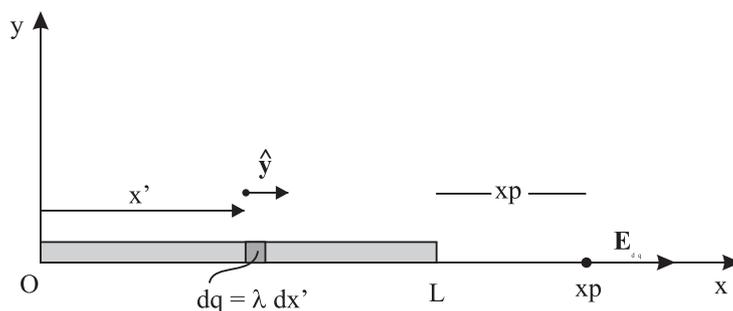


Figura 2.10: Campo criado por uma barra - 1

As distâncias relevantes ao problema são:

a) A distância que localiza dq no referencial em questão

$$x' \quad x'$$

b) A distância que localiza o ponto de observação

$$x_P + L \quad x_P + L/2$$

a) A distância “da lei de Coulomb” - distância entre dq e o ponto de observação

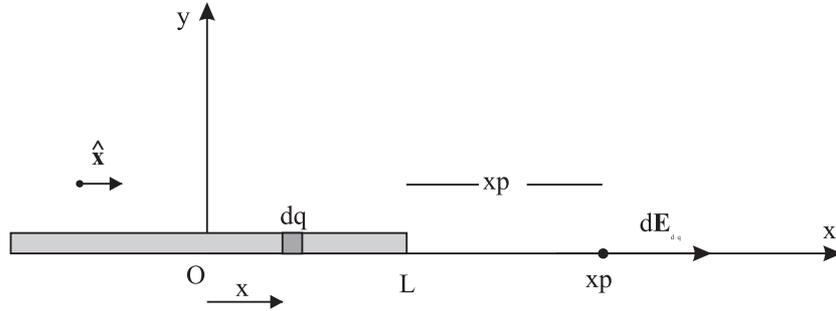


Figura 2.11: Campo criado por uma barra - 2

$$x_P + L - x' \qquad x_P + L/2 - x'$$

A direção do campo está desenhada nas figuras (não se esqueça de *sempre* desenhar o campo - freqüentemente haverão simetrias que podem simplificar seus cálculos. Não é o caso aqui). O elemento diferencial do campo gerado por dq é:

$$d\mathbf{E}_{dq} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0(x_P + L - x')^2} \hat{\mathbf{x}} \qquad d\mathbf{E}_{dq} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0(x_P + L/2 - x')^2} \hat{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{E} = \int_0^L \frac{dq}{4\pi\epsilon_0(x_P + L - x')^2} \hat{\mathbf{x}} \qquad \mathbf{E} = \int_{-L/2}^{+L/2} \frac{dq}{4\pi\epsilon_0(x_P + L/2 - x')^2} \hat{\mathbf{x}}$$

Nos dois casos $dq = \lambda dx'$. Para integrar, fazemos a transformação de variáveis

$$u = x_P + L - x' \qquad u = x_P + L/2 - x'$$

$$\int_0^L dx' = - \int_{x_P+L}^{x_P} du \qquad \int_{-L/2}^{+L/2} dx' = - \int_{x_P+L}^{x_P} du$$

Aqui já podemos ver que os dois resultados serão o MESMO, como deveria ser, pois nos dois casos a integral a ser calculada é

$$\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{x_P+L}^{x_P} \frac{-du}{u^2} = + \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} u^{-1} \Big|_{x_P+L}^{x_P} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{x_P} - \frac{1}{x_P + L} \right]$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{L}{x_P(x_P + L)}$$

Agora vamos fazer um limite cuja resposta conhecemos, para testar a resposta obtida: sabemos que quando estamos muito longe da barra ($x_P \gg L$) devemos obter o resultado da carga puntiforme, pois o tamanho da barra ficando irrelevante, de longe vamos ver uma carga $Q = \lambda L$ na origem.

Note que

$$\mathbf{E} \cong \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda L}{x_P^2} \hat{\mathbf{x}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 x_P^2} \hat{\mathbf{x}} \quad (x_P \gg L)$$

O próximo problema usa o conhecimento que você já deve ter adquirido no problema anterior incluindo agora um ingrediente novo.

2) Problema idêntico ao anterior, com a diferença que a distribuição de cargas é diferente para cada metade da barra. Considere λ_1 e λ_2 dados.

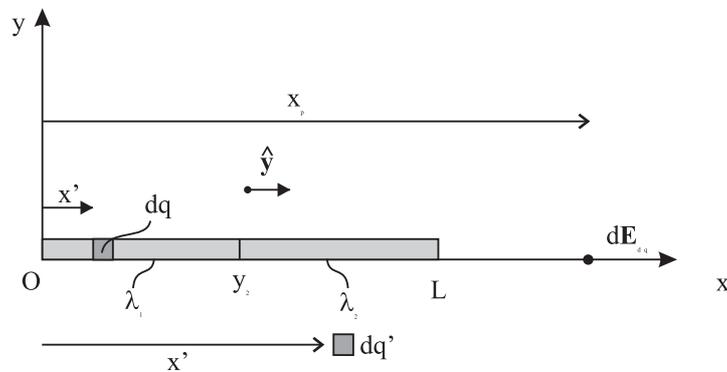


Figura 2.12: Campo da barra não uniforme

dq poderia estar representado na porção da barra com densidade de carga λ_2 .

$$d\mathbf{E}_{dq} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq'}{(x_P - x')^2} \hat{\mathbf{x}} \quad 0 \leq x \leq L/2$$

$$d\mathbf{E}_{dq} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq'}{(x_P - x')^2} \hat{\mathbf{x}} \quad L/2 \leq x \leq L/2$$

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{L/2} \frac{\lambda_1 dx'}{(x_P - x')^2} \hat{\mathbf{x}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{L/2}^L \frac{\lambda_2 dx'}{(x_P - x')^2} \hat{\mathbf{x}} \\ &= \frac{\lambda_1}{4\pi\epsilon_0} u^{-1}|_{x_P}^{L/2} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\lambda_2}{4\pi\epsilon_0} u^{-1}|_{L/2}^L \hat{\mathbf{x}}\end{aligned}$$

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{L/2}{x_P(x_P - L/2)} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\lambda_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{L/2}{(x_P - L/2)(x_P - L)} \hat{\mathbf{x}}$$

Podemos reescrever a resposta em termos das cargas totais $Q_1 = \lambda_1 L/2$ e $Q_2 = \lambda_2 L/2$

$$\mathbf{E} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 x_P(x_P - L/2)} \hat{\mathbf{x}} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 (x_P - L/2)(x_P - L)} \hat{\mathbf{x}}$$

Note que se $x_P \gg L$, então teremos

$$\mathbf{E} \longrightarrow \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 x_P^2} \hat{\mathbf{x}}$$

E portanto se as cargas forem *opostas*, para pontos muito distantes da barra, o campo será *nulo*. Isso não acontece fora desse limite, pois o tamanho da barra vai ter o papel de “desbalancear” as contribuições positiva e negativa, uma vez que uma delas estará mais distante de x_P .

Vamos agora calcular o campo elétrico para pontos sobre o eixo vertical da barra.

3) Considere um fio de comprimento L com densidade superficial de carga λ uniformemente distribuída, como mostra a figura 2.13. Determine o campo elétrico no ponto $P(x_P, y_P)$.

Este é o caso mais geral que podemos construir. Note a posição genérica do sistema de referência e do ponto de observação.

- Localização do ponto P : $x_P \hat{\mathbf{i}} + y_P \hat{\mathbf{j}}$
- Localização de dq : $x' \hat{\mathbf{i}}$
- Localização do vetor distância entre dq e P : $(x_P - x') \hat{\mathbf{i}} + y_P \hat{\mathbf{j}}$

$$d\mathbf{E}_{dq} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx'}{[(x_P - x')^2 + y_P^2]^{3/2}} [(x_P - x') \hat{\mathbf{i}} + y_P \hat{\mathbf{j}}]$$

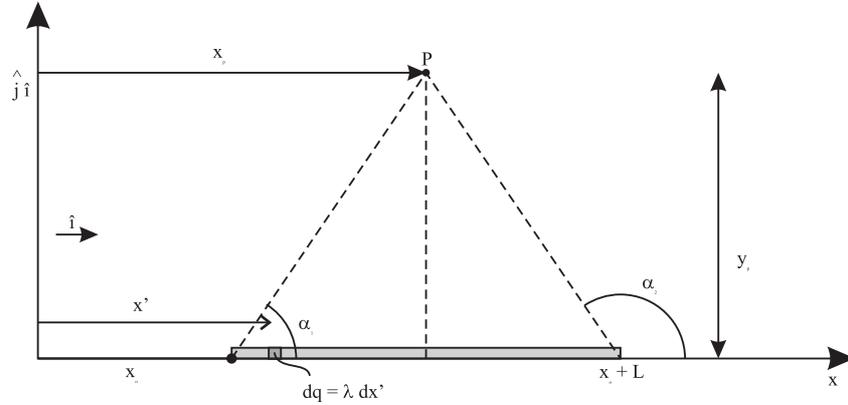


Figura 2.13: Campo criado por fio uniforme

Note que neste caso o vetor unitário que dá a direção de $d\mathbf{E}_{dq}$ é

$$\frac{(x_P - x')\hat{\mathbf{i}} + y_P\hat{\mathbf{j}}}{[(x_P - x')^2 + y_P^2]^{1/2}}$$

daí o fator $[(x_P - x')^2 + y_P^2]^{3/2}$ no denominador.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{G\text{eral}}(x_P, y_P) &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\hat{\mathbf{i}} \int_{x_0}^{x_0+L} \frac{(x_P - x')dx'}{[(x_P - x')^2 + y_P^2]^{3/2}} \\ &+ \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}y_P\hat{\mathbf{j}} \int_{x_0}^{x_0+L} \frac{y_P dx'}{[(x_P - x')^2 + y_P^2]^{3/2}} \end{aligned}$$

A segunda integral é mais simples. Vamos começar por ela:

$$I_2 = \int_{x_0}^{x_0+L} \frac{dx'}{[(x_P - x')^2 + y_P^2]^{3/2}}$$

Fazemos a transformação de variáveis $u = x_P - x'$ e teremos

$$\int_{x_P - x_0 = u_0}^{x_P - x_0 + L = u_1} \frac{-du}{(u^2 + y_P^2)^{3/2}}$$

Uma nova substituição de variáveis $u = y_P \tan \theta$, $du = y_P \sec^2 \theta d\theta$

$$\int_{\theta_1 = \arctan \frac{u_0}{y_P}}^{\theta_2 = \arctan \frac{u_1}{y_P}} \frac{y_P \sec^2 \theta d\theta}{(y_P^2 \tan^2 \theta + y_P^2)^{3/2}} = y_P^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\sec^2 \theta d\theta}{y_P^3 (\tan^2 \theta + 1)} =$$

$$= \frac{1}{y_P^2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{\sec \theta} = \frac{1}{y_P^2} \sin \theta \Big|_{\theta_1}^{\theta_2}$$

Como $\tan \theta = \frac{u}{y_P}$ sabemos que $\sin \theta = \frac{u}{\sqrt{u^2 + y_P^2}}$

Assim $\sin \theta_1 = \frac{x_0 - x_P}{\sqrt{(x_0 - x_P)^2 + y_P^2}}$ e $\sin \theta_2 = \frac{x_0 - x_P + L}{\sqrt{(x_0 + L - x_P)^2 + y_P^2}}$

Assim obtemos

$$I_2 = \frac{1}{y_P} \left[\frac{x_0 - x_P + L}{\sqrt{(x_0 + L - x_P)^2 + y_P^2}} - \frac{x_0 - x_P}{\sqrt{(x_0 - x_P)^2 + y_P^2}} \right]$$

E a componente y do campo será:

$$\begin{aligned} E_y &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 y_P} \int_{x_0}^{x_0+L} \frac{dx'}{[(x_P - x')^2 + y_P^2]^{3/2}} = \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 y_P} \left[\frac{x_0 - x_P + L}{\sqrt{(x_0 + L - x_P)^2 + y_P^2}} - \frac{x_0 - x_P}{\sqrt{(x_0 - x_P)^2 + y_P^2}} \right] \end{aligned}$$

A outra integral pode ser resolvida utilizando as mesmas transformações de variáveis (deixamos para você fazer. Agora é simples). O resultado da integral, como você vai ver é:

$$\int_{x_0}^{x_0+L} \frac{(x_P - x')dx'}{[(x_P - x')^2 + y_P^2]^{3/2}} = \frac{1}{y_P} \cos \theta \Big|_{\theta_1}^{\theta_2}$$

Onde

$$\cos \theta_1 = \frac{y_P}{\sqrt{(x_0 - x_P)^2 + y_P^2}} \quad e \quad \cos \theta_2 = \frac{y_P}{\sqrt{(x_0 + L - x_P)^2 + y_P^2}}$$

E teremos, finalmente

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{(x_0 + L - x_P)^2 + y_P^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x_0 - x_P)^2 + y_P^2}} \right]$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{G\acute{e}ral}(x_P, y_P) &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \hat{\mathbf{i}} \left(\frac{1}{\sqrt{(x_0 + L - x_P)^2 + y_P^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x_0 - x_P)^2 + y_P^2}} \right) \\ &+ \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 y_P} \hat{\mathbf{j}} \left(\frac{x_0 - x_P + L}{\sqrt{(x_0 + L - x_P)^2 + y_P^2}} - \frac{x_0 - x_P}{\sqrt{(x_0 - x_P)^2 + y_P^2}} \right) \end{aligned}$$

Agora vamos aprender a fazer limites. Podemos, antes de mais nada colocar o ponto P num ponto onde haja simetria como na figura 2.14

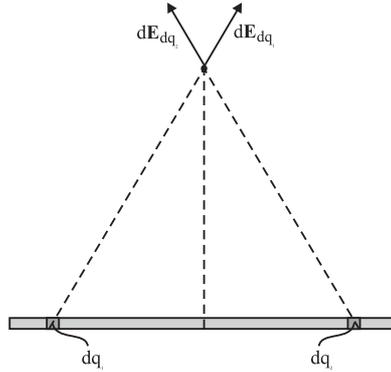


Figura 2.14: Ponto simétrico P

Da figura vemos que o ponto $P = (x_0 + L/2, y_P)$ e cada dq , do lado esquerdo, vai haver um dq_2 simétrico tal que as componentes na direção $\hat{\mathbf{i}}$ dos dois campos devem se anular. Será que a fórmula geral “sabe” disso? Substitua e veja que sim. É *um sinal* de que a expressão está correta.

E nosso primeiro resultado? Corresponderia a fazer $x_0 = 0$ e $y_P = 0$ na componente x do campo e considerar $E_y = 0$ (note que na expressão final o limite $y_P \rightarrow 0$ diverge, mas ele não deve ser tomado nesse estágio, uma vez que durante os cálculos dividimos por y_P . Note que na expressão para $d\mathbf{E}_{dq}$, a componente y se anula nesse limite). Obteremos então, exatamente o resultado do problema (1).

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \hat{\mathbf{i}} \left[\frac{1}{(x_P + L)} - \frac{1}{x_P} \right] = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{L}{x_P(x_P + L)} \hat{\mathbf{i}}$$

Outro exemplo que pode ser obtido da expressão geral: o campo de um fio semi-infinito que se estende de x_0 até ∞ .

$$\mathbf{E} = \lim_{L \rightarrow \infty} \mathbf{E}_G$$

Da componente x sobra apenas o segundo termo entre parênteses, o primeiro tende a zero.

$$E_x \implies \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{(x_0 - x_P)^2 + y_P^2}} \hat{\mathbf{i}} \quad (L \rightarrow \infty)$$

Para calcular E_y neste limite, notemos que

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{x_0 + L - x_P}{\sqrt{(x_0 + L - x_P)^2 + y_P^2}} = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{(x_0 + L - x_P)}{(x_0 + L - x_P) \sqrt{1 + \left(\frac{y_P}{x_0 + L - x_P}\right)^2}} = 1$$

Assim, o campo elétrico na direção y para um fio semi-infinito fica

$$\mathbf{E}_{fio \text{ semi-inf.}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{(x_0 - x_P)^2 + y_P^2}} \hat{\mathbf{i}} + \left(1 - \frac{(x_0 - x_P)}{\sqrt{(x_0 - x_P)^2 + y_P^2}} \hat{\mathbf{j}} \right) \right]$$

Outro limite: o fio infinito. Para obter este resultado devemos fazer, no resultado anterior o limite de $x_0 \rightarrow -\infty$. Pela simetria envolvida agora no problema (faça um *desenho*, se não conseguir perceber isto!) esperamos que a componente E_y do campo se anule. Este é de fato o caso, pois

$$E_{x, fio \text{ semi-inf.}} = \lim_{x_0 \rightarrow 0} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{(x_0 - x_P)^2 + y_P^2}} = 0$$

$$E_{y, fio \text{ semi-inf.}} = \lim_{x_0 \rightarrow -\infty} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 y_P} \left[1 - \frac{(x_0 - x_P)}{\sqrt{(x_0 - x_P)^2 + y_P^2}} \right]$$

Aqui precisamos ter cuidado: como x_0 é um número negativo, vemos que

$$\lim_{x_0 \rightarrow -\infty} \frac{(x_0 - x_P)}{\sqrt{(x_0 - x_P)^2 + y_P^2}} = 1$$

Pois o denominador será positivo nesse limite.

Portanto,

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 y_P} [1 - (-1)] = 2 \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 y_P} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 y_P}$$

Este resultado vai ser obtido novamente no capítulo seguinte usando a lei de Gauss.

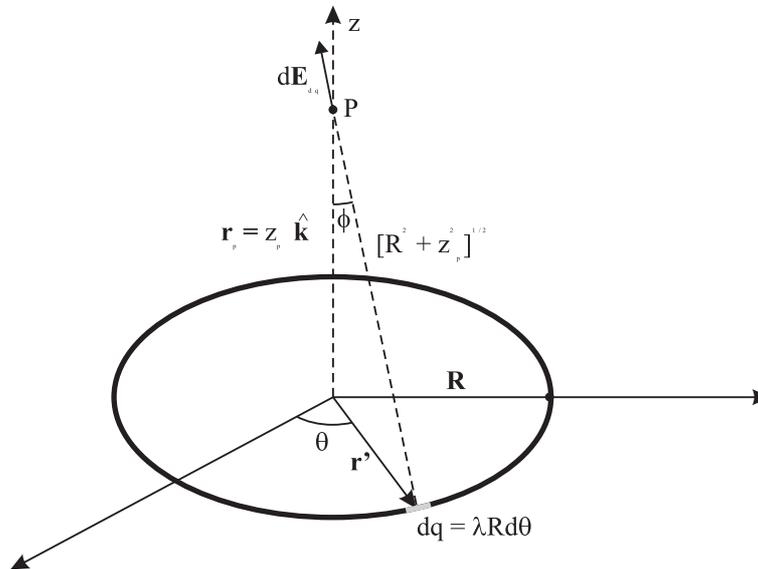


Figura 2.15: Campo de uma espira

4) Considere uma espira metálica de raio R carregada com uma carga total Q positiva, como mostra a figura 2.15.

Da figura, vemos que

a) Para qualquer dq no aro, a distância que o localiza a partir do centro é sempre $r' = R$.

b) A localização do ponto de observação é $\mathbf{r}_P = z_P \hat{\mathbf{k}}$.

c) A distância entre dq e P é $\sqrt{R^2 + z_P^2}$.

Simetria: Vemos que, pela simetria do problema, o campo gerado por qualquer elemento de carga dq , terá um correspondente simétrico com relação à origem, cuja campo terá uma componente horizontal *idêntica* e na vertical de mesmo módulo e sentido. Podemos então escrever

$$d\mathbf{E}_{dq} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{R d\theta'}{(R^2 + z_P^2)^{3/2}} \cos \phi \hat{\mathbf{k}}$$

Como $\cos \phi = z_P / \sqrt{R^2 + z_P^2}$

$$d\mathbf{E}_{dq} = \frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\theta' \frac{z_P}{(R^2 + z_P^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{k}}$$

Repare que o integrando não depende de θ' . Fica então, muito fácil

$$\mathbf{E}_{anel}(z_P) = \frac{\lambda R \cdot 2\pi z_P}{4\pi\epsilon_0(R^2 + z_P^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{k}} = \frac{Q z_P}{4\pi\epsilon_0(R^2 + z_P^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{k}}$$

Note que o campo na origem $z_P = 0$ é nulo, como seria de se esperar por simetria.

Outra vez, se $z_P \gg R$, devemos obter o campo de uma carga puntiforme. Vamos encontrar o parâmetro adimensional que caracteriza essa condição.

$$x = \frac{R}{z_P} \ll 1$$

Reescrevendo

$$\frac{z_P}{(R^2 + z_P^2)^{3/2}} = \frac{z_P}{z_P^3(1 + x^2)^{3/2}}$$

E usando a expansão em série de Taylor para $x \ll 1$ obtemos imediatamente

$$\mathbf{E}_{anel}(z_P) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z_P^2} \hat{\mathbf{k}} \quad \text{se} \quad R \ll z_P$$

Dentro de uma geometria parecida, podemos fazer ainda o seguinte problema.

6) Consideremos um *aro* uniformemente carregado, com densidade superficial de carga $\lambda > 0$, e calcule o campo elétrico no ponto P da figura 2.16.

Aqui novamente por simetria, o campo na direção x se anulará. Devemos calcular então

$$\begin{aligned} |d\mathbf{E}_{dq}| &= -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{R d\theta'}{R^2} \\ \mathbf{E} &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{R d\theta' \cos \theta'}{R^2} \cdot (-\hat{\mathbf{x}}) \\ \mathbf{E}(x_P = 0) &= +\frac{R\lambda}{4\pi\epsilon_0 R^2} (+\sin \theta') \Big|_{-\pi/3}^{+\pi/3} (-\hat{\mathbf{x}}) \\ &= \frac{\lambda\sqrt{3}/2}{2\pi\epsilon_0 R} (-\hat{\mathbf{x}}) = \frac{1,73\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} (-\hat{\mathbf{x}}) \end{aligned}$$

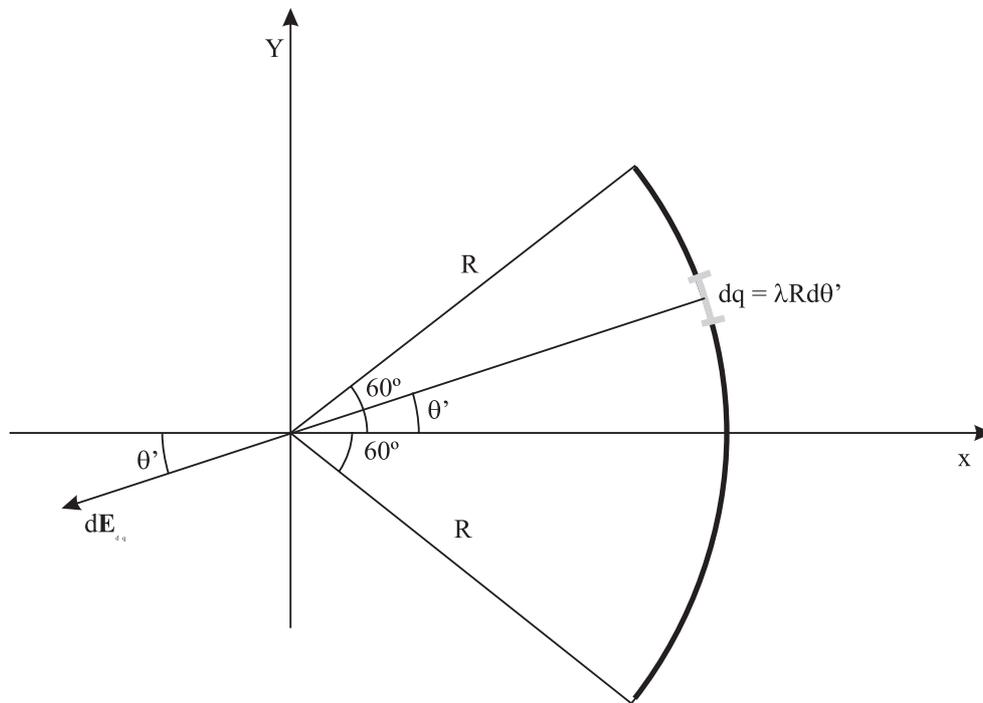


Figura 2.16: Campo de um aro

7) Considere um disco de forma circular, de raio R com densidade superficial uniforme de carga σ em sua face superior. Calcule o campo elétrico gerado por ele no ponto P situado sobre seu eixo.

Tendo identificado todos os elementos essenciais ao nosso cálculo na figura, notemos ainda que, outra vez, por simetria, teremos apenas resultado não nulo para o campo na direção \hat{z} .

$$|d\mathbf{E}_{dq}| = \frac{\sigma r' dr' d\theta'}{4\pi\epsilon_0(r'^2 + z_P^2)^2}$$

$$\mathbf{E}(z_P) = \int \frac{\sigma r' dr' \cos \phi d\theta'}{4\pi\epsilon_0(r'^2 + z_P^2)^2} \hat{z}$$

E como $\cos \phi = y_P / \sqrt{r'^2 + z_P^2}$

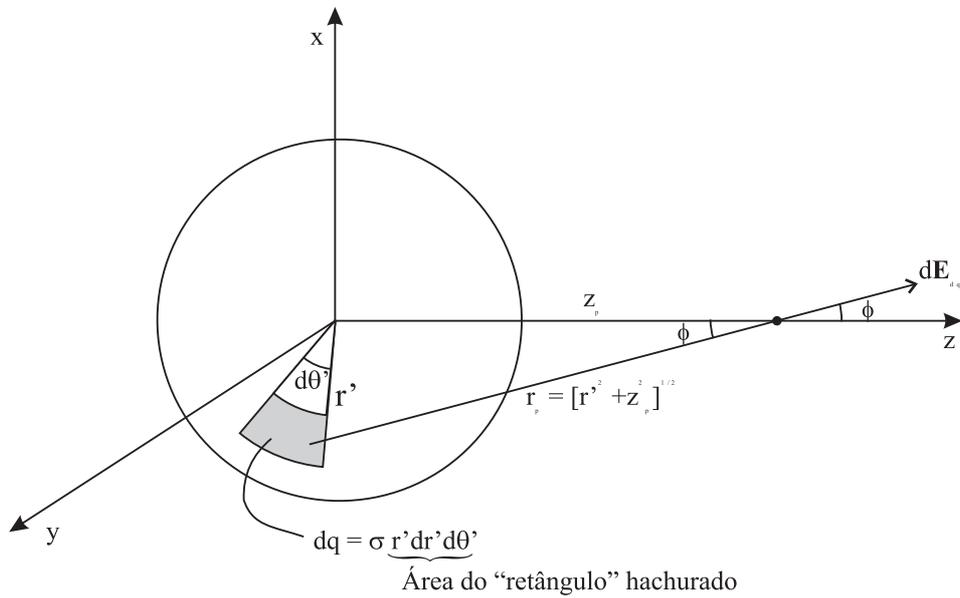


Figura 2.17: Campo de um disco

$$\mathbf{E}(z_P) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\theta' \int_0^R \frac{r' dr'}{(r'^2 + z_P^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}}$$

A integração em θ' pode ser feita imediatamente e dá um fator 2π . A integral é simples.

$$u = r'^2 + z_P^2 \quad \longrightarrow \quad du = 2r' dr'$$

$$\int_0^R \frac{r' dr'}{(r'^2 + z_P^2)^{3/2}} = \frac{1}{2} \int_{z_P^2}^{R^2 + z_P^2} \frac{du}{u^{3/2}} = -u^{-1/2} \Big|_{z_P^2}^{R^2 + z_P^2}$$

Finalmente, substituindo na expressão para o campo. Vem

$$\mathbf{E}(z_P) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{z_P}{\sqrt{R^2 + z_P^2}} \right] \hat{\mathbf{z}}$$

Deixamos como exercício a você fazer os limites conhecidos.

2.6 Condutores em campos eletrostáticos e questões conceituais

Vamos agora a alguns exercícios que envolvem pouco cálculo e muito raciocínio. Para isto precisaremos saber algumas características físicas importantes dos condutores.

* Se um condutor eletrizado estiver em equilíbrio eletrostático, as cargas estarão distribuídas na superfície.

* Se um condutor eletrizado estiver em equilíbrio eletrostático, o campo elétrico será nulo em todos os pontos do seu interior e em pontos da superfície desse condutor \mathbf{E} será perpendicular a ela (se houvesse componente horizontal, os elétrons se moveriam e o condutor não estaria em equilíbrio).

Estes fenômenos físicos tem consequências físicas importantes. Por exemplo, uma cavidade no interior de um condutor é uma região que não será atingida por efeitos elétricos produzidos externamente, pois o campo elétrico nessa cavidade é sempre nulo e não há carga elétrica distribuída em sua parede (a carga se localiza na *superfície* do condutor). Por este motivo um condutor pode ser usado para produzir *blindagem eletrostática*: quando queremos proteger um aparelho qualquer contra influências elétricas, nós envolvemos esse aparelho com uma capa metálica. Nestas condições dizemos que o aparelho está *blindado*, pois nenhum fenômeno elétrico externo poderá afetá-lo.

* Se você observar o interior de um aparelho de TV, por exemplo, poderá notar que algumas válvulas (e outros dispositivos) se apresentam envolvidos por capas metálicas, estando portanto, blindadas por esses condutores.

2.6.1 Questões conceituais simples - (Livro da Beatriz Alvarenga)

1) Um pedaço de borracha é atritado em uma certa região de sua superfície, adquirindo uma carga negativa naquela região. Esta carga se distribuirá na superfície da borracha? Por quê?

Não, porque a borracha é isolante.

2) Um estudante verificou que a presença de uma carga Q estava perturbando o funcionamento de um aparelho elétrico P (próximo de Q). Desejando evitar essas perturbações ele envolveu a carga Q com uma cúpula metálica, como mostra a figura do exercício. Mas agindo dessa maneira ele não conseguiu o seu objetivo!! Como deveria ele ter procedido? (sem afastar Q do aparelho)?

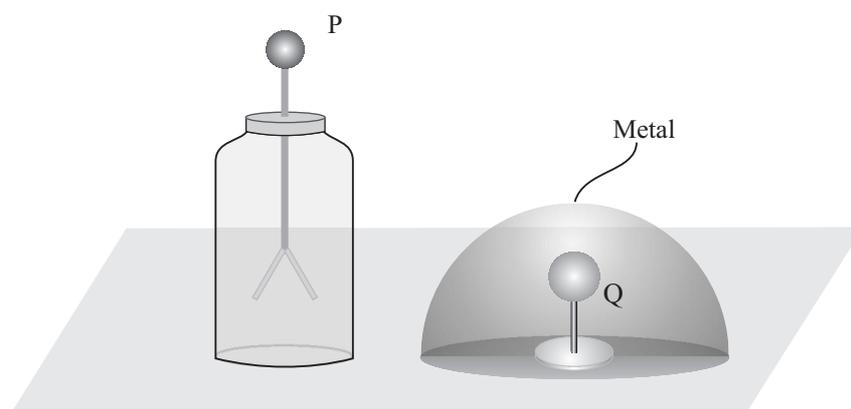


Figura 2.18: Experiência com cargas

É óbvio que ele deveria ter envolvido P com metal, e não Q !!